



# Polynôme chromatique mixte et interpretation des coefficients.

Jean-François Culus

## ► To cite this version:

Jean-François Culus. Polynôme chromatique mixte et interpretation des coefficients.. 2007. hal-00134862

**HAL Id: hal-00134862**

**<https://hal.science/hal-00134862>**

Preprint submitted on 5 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Polynôme chromatique mixte et interprétation des coefficients

Jean-François Culus<sup>1</sup>

Université Toulouse le Mirail, Equipe GRIMM - Smash  
culus@univ-tlse2.fr

**Résumé** La coloration orientée est une adaptation possible de la notion de coloration aux graphes orientés. Poursuivant ce parallèle, le polynôme chromatique orienté  $|\vec{P}(\vec{G}, -1)|$  du graphe orienté  $\vec{G}$  est une adaptation possible du polynôme chromatique  $P(G, k)$  d'un graphe  $G$ . Le but de cet article consiste en l'obtention d'une interprétation similaire au résultat de Stanley relatif au polynôme chromatique classique, à savoir, interpréter  $|P(G, -1)|$  comme le nombre d'orientations acircuitiques du graphe  $G$ . Pour ce faire, nous généralisons, déjà, les notions de colorations et colorations orientées aux graphes mixtes en introduisant la notion de coloration mixte. Celle-ci nous permet d'obtenir une adaptation possible du résultat de Stanley pour une sous-famille de graphes mixtes que nous explicitons. Nous montrons aussi une adaptations possible de cette interprétation à une sous-famille plus large de graphes mixtes.

**Mots-Clefs.** Graphe ; Coloration ; Polynôme chromatique.

## 1 Introduction

La notion de coloration a été largement étudiée depuis de nombreuses années ; nous renvoyons, par exemple, à [12,5] pour un aperçu plus complet sur le sujet. En 1912, Birkhoff introduit la notion de polynôme chromatique d'un graphe  $G$ , comme étant l'application qui à tout entier strictement positif  $k$  associe  $P(G, k)$ , le nombre de  $k$ -colorations d'un graphe  $G$  (cf [1,2]). C'est en 1973, dans [11], que Stanley interprète la valeur absolue du polynôme chromatique considéré en  $-1$  d'un graphe  $G$ , en fonction du nombre d'orientations acircuitiques de ce même graphe. Ce résultat sera ensuite successivement amélioré par de nombreux auteurs ([3,?,4,?]), donnant des interprétations des différents coefficients du polynôme chromatique en termes d'orientations acircuitiques. La notion de coloration orientée est une généralisation possible de la notion de coloration classique aux graphes orientés. Cette notion a été introduite dans [10], et a ensuite fait l'objet d'intenses études afin d'adapter des notions classiques de la théorie de la coloration [8,6]. C'est dans [9] qu'est introduit la notion de polynôme chromatique orienté ; Eric Sopena y donne les premières propriétés de ce polynôme.

Le but de cet article est de poursuivre cette étude en tentant de trouver un résultat similaire à celui obtenu par Stanley relativement au polynôme chromatique classique. Pour ce faire, nous introduirons dans un premier temps la notion de coloration mixte (d'un graphe mixte), généralisant à la fois les notions de colorations classique et orientée. Nous l'étudierons dans la section 3, en la reliant aux précédentes colorations et en énonçant les principales caractéristiques du polynôme chromatique mixte. Dans un second temps, nous étudierons, dans la section 4, le lien entre la valeur absolue de l'évaluation du polynôme chromatique mixte d'un graphe mixte en termes d'orientations acircuitiques d'un graphe, généralisant le résultat de Stanley et l'adaptant à certains cas de graphes orientés.

## 2 Définitions

Nous considérerons, ici, des graphes  $G = (V(G), E(G))$  simples (i.e. sans boucle ni arêtes parallèles). Une  $k$ -coloration d'un graphe  $G$  est une application  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$  telle que, si les sommets  $x$  et  $y$  sont voisins dans  $G$ , alors  $c(x) \neq c(y)$ . Nous désignons par  $P(G, k)$  le polynôme chromatique orienté, défini pour tout  $k$  positif, comme étant le nombre de  $k$ -coloration de  $G$ .

Soit  $e = \{x, y\} \in E(G)$  une arête de  $G$ . Une orientation  $o(e)$  de l'arête  $e$  est un élément de l'ensemble  $\{(x, y), (y, x)\}$ . Une orientation  $o$  d'un graphe  $G$  est la donnée d'une orientation de chacune de ses arêtes. On notera  $o(G)$  le graphe orienté  $\vec{G}$  ainsi obtenu.

Nous désignerons par  $\vec{G}$  un graphe orienté  $\vec{G} = (V(\vec{G}), A(\vec{G}))$ . Une  $k$ -coloration orientée de  $\vec{G}$  est une application  $c_o : V(\vec{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  telle que, si  $(x, y)$  et  $(z, t)$  sont des arcs de  $\vec{G}$ ,  $c_o(x) = c_o(t) \implies c_o(y) \neq c_o(z)$ .

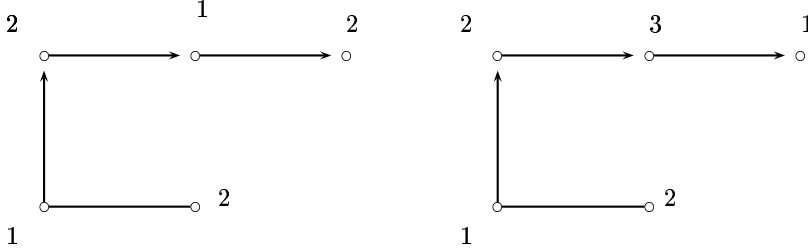
Une telle définition nous permet d'adapter la notion de polynôme chromatique dans le cadre des graphes

orientés (cf [9]). Si  $\vec{G}$  désigne un graphe orienté et  $k$  un entier positif, nous dénotons par  $\vec{P}(\vec{G}, k)$  le nombre de  $k$ -colorations orientées de  $\vec{G}$ .

Enfin, nous dénotons par  $G_m = (V(G_m), A(G_m), E(G_m))$  un graphe mixte. Nous n'autorisons pas les arcs parallèles (ni les boucles), mais un arc et une arête de  $G_m$  peuvent avoir même extrémités.

Une  $k$ -coloration mixte de  $G_m$  est une application  $c_m : V(G_m) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  telle que :

- i.  $\forall \{x, y\} \in E(G_m)$  ou  $\forall (x, y) \in A(G_m), c(x) \neq c(y)$ ,
- ii.  $\forall (x, y), (z, t) \in A(G_m), c(x) = c(t) \Rightarrow c(y) \neq c(z)$



**Exemple 1.** La figure ci-dessus représente un graphe mixte  $G_m$  muni de deux applications de  $V(G_m)$  dans  $\{1, 2, 3\}$ . L'application représentée en figure a. n'est pas une coloration mixte puisque nous avons une violation de la condition ii. L'application décrite figure b est, elle, bien une 3-coloration mixte du graphe mixte  $G_m$ .

Si  $G_m$  désigne un graphe mixte, nous désignons par  $Und(G_m)$  le graphe simple (dit sous-jacent) obtenu par suppression des orientations des arcs et par suppression éventuelle des arêtes parallèles multiples. Un *chemin* (de  $x_0$  à  $x_l$ ) dans  $G_m$  est une suite  $(x_0, \dots, x_l)$  de sommets de  $G_m$  tels que  $\forall i \in \{0, 1, \dots, l\}, (x_i, x_{i+1}) \in A(G_m)$ . Un *circuit* de  $G_m$  est un chemin d'un sommet  $x_0$  à lui-même. Le graphe  $G_m$  est dit *arcircuitique* s'il ne contient aucun circuit.

### 3 Coloration mixte d'un graphe mixte

Lions la définition précédente de coloration mixte  $c_m$  aux deux colorations : classique et orientée. A un graphe mixte  $G_m = (V(G_m), A(G_m), E(G_m))$  nous associons les graphes  $G$  et  $\vec{G}$ , respectivement simple et orienté suivants :  $G = (V(G_m), E(G_m))$  et  $\vec{G} = (V(G_m), A(G_m))$ .

**Lemme 1** Soit  $G_m = (V(G_m), A(G_m), E(G_m))$  un graphe mixte. L'application  $c_m$  est une  $k$ -coloration mixte de  $G_m$  si et seulement si les applications  $c$  et  $c_o$  définies par  $\forall x \in V(G), c(x) = c_o(x) = c_m(x)$  sont respectivement des colorations classique et orientée de, respectivement  $G = (V(G_m), E(G_m))$  et  $\vec{G} = (V(G_m), A(G_m))$ .

Ainsi, peut-on affirmer que la notion de coloration mixte étend les notions de colorations classique et orientée. En particulier, toute coloration d'un graphe  $G$  ou toute coloration orientée d'un graphe orienté  $\vec{G}$  est une coloration mixte respectivement du graphe mixte  $G$  et  $\vec{G}$ .

Soit  $G_m$  un graphe mixte. Nous désignons par  $P_m(G_m, k)$  le *polynôme chromatique mixte* de  $G_m$  défini pour tout entier  $k$  positif, comme étant le nombre de  $k$ -colorations mixtes de  $G_m$ . Nous vérifierons ultérieurement que cette fonction est bien un polynôme (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).

Un graphe  $G$  ou qu'un graphe orienté  $\vec{G}$  peuvent être vus comme des graphes mixtes, nous obtenons :

**Corollaire 1** Soit  $G$  un graphe simple et  $k$  un entier strictement positif.

$$P(G, k) = P_m(G, k)$$

Soit  $\vec{G}$  un graphe orienté et  $k$  un entier strictement positif.

$$\vec{P}(\vec{G}, k) = P_m(\vec{G}, k)$$

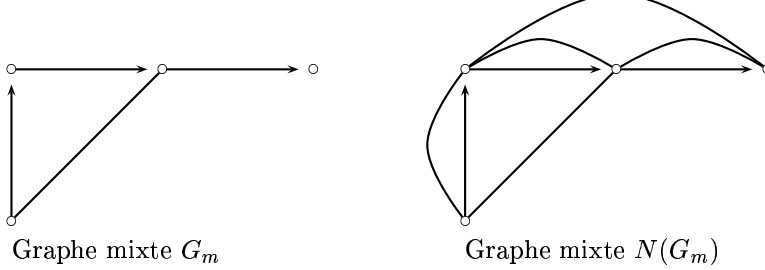
Ainsi, la notion de polynôme chromatique mixte généralise bien les notions de polynômes chromatiques classique et orienté. Ce corollaire nous permet d'obtenir quelques résultats, tels :

Si  $G_m$  est le graphe mixte vide (i.e.  $E(G_m) = A(G_m) = \{\emptyset\}$ ) d'ordre  $n$ ,  $P_m(G_m, k) = k^n$ .

Si  $G_m$  est un graphe mixte complet (i.e.  $\forall x, y \in V(G_m), \{x, y\} \in E(G_m)$  ou  $(x, y) \in A(G_m)$  ou  $(y, x) \in A(G_m)$ ), alors  $P_m(G_m, k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$ .

Dans [9] était soulignée l'existence de graphes orientés non-tournoi d'ordre  $n$  vérifiant  $P_m(\vec{G}, k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$ . Nous allons associer au graphe mixte  $G_m$  le graphe mixte  $N(G_m)$ ; celui-ci nous permet d'obtenir une caractérisation simple de tous les graphes (mixtes) dont le polynôme chromatique vérifie  $P_m(G_m, k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$ .

Soit  $G_m$  un graphe mixte. Nous lui associons le graphe  $N(G_m)$  défini par :  $V(N(G_m)) = V(G_m)$ ;  $A(N(G_m)) = A(G_m)$ ;  $E(N(G_m)) = E(G_m) \cup \{\{x, y\} / \exists z \in V(G_m), (x, z), (z, y) \in A(G_m)\}$ .



**Lemme 2** Soit  $G_m$  un graphe mixte et  $k$  un entier strictement positif. Toute  $k$ -coloration mixte de  $G_m$  est une  $k$ -coloration mixte de  $N(G_m)$ .

Démonstration : Soient  $x, y \in V(G_m)$  tels que  $(x, y) \in A(G_m)$ . Alors, toute coloration mixte  $c_m$  de  $G_m$  vérifie  $c_m(x) \neq c_m(y)$ . De même, s'il existe  $z \in V(G_m)$  tel que  $(x, z), (z, y) \in A(G_m)$ , nous avons  $c_m(x) \neq c_m(y)$ . Ainsi, toute coloration mixte de  $G_m$  est-elle une coloration mixte de  $N(G_m)$ . La réciproque est évidente, puisque  $G_m$  est un sous-graphe mixte de  $N(G_m)$ .  $\square$

Nous déduisons alors le corollaire suivant :

**Corollaire 2** Pour tout entier  $k$  strictement positif :

$$P_m(G_m, k) = P_m(N(G_m), k)$$

Relativement à la caractérisation du polynôme chromatique mixte, nous avons :

**Corollaire 3** Soit  $G_m$  un graphe mixte d'ordre  $n$ .

$$P(G_m, k) = k(k-1)\dots(k-n+1) \iff N(G_m) \text{ est un graphe mixte complet}$$

Les précédents corollaires impliquent que nous pouvons toujours considérer que les graphes mixtes que nous étudions sont  $N$ -maximaux, c'est-à-dire vérifient  $N(G_m) = G_m$ .

Nous pouvons finalement énoncer les principales propriétés du polynôme chromatique mixte, faisant écho à celles des polynômes classique et orienté.

**Théorème 1** Soit  $G_m$  un graphe mixte  $N$ -maximum (i.e.  $N(G_m) = G_m$ ).

Soit  $e = \{x, y\} \notin E(G_m)$ . Nous désignons par  $G_m - e$  le graphe mixte obtenu en identifiant les sommets  $x$  et  $y$  de  $G_m$  et en remplaçant les arêtes multiples par une arête unique. Le graphe  $G_m \cup e$  est défini comme le graphe  $G_m$  augmenté de l'arête  $e$ . Nous avons alors :

$$P_m(G_m, k) = P_m(G_m \cup e, k) + P_m(G_m - e, k)$$

Preuve : Partitionnons l'ensemble des colorations mixtes  $c_m$  de  $G_m$  en, d'une part, celles donnant même couleur aux sommets  $x$  et  $y$  et, d'autre part, en celles donnant des couleurs différentes à ces deux sommets.

Toute coloration mixte  $c_m$  de  $G_m$  telle que,  $c_m(x) = c_m(y)$  est une coloration mixte de  $G_m - e$ .

Toute coloration mixte  $c_m$  de  $G_m$  telle que,  $c_m(x) \neq c_m(y)$  est une coloration de  $G_m \cup e$ .  $\square$

**Théorème 2** Pour tout graphe mixte  $G_m$  d'ordre  $n$ , nous avons :

$P_m(G_m, k)$  est un polynôme d'ordre  $n$  en  $k$ .

Le coefficient dominant de ce polynôme est 1.

$P_m(G_m, k)$  n'a pas de terme constant.

Le coefficient de  $k^{n-1}$  dans  $P(G_m, k)$  est égal à  $-|E(Und(N(G_m)))|$ .

Démonstration : Considérons, sans perte de généralité, un graphe mixte  $G_m$   $N$ -maximal.  $Und(G_m)$  désigne le graphe sous-jacent au graphe mixte  $G_m$ , obtenu par suppression de l'orientation des arcs de  $G_m$  et en identifiant les éventuelles arêtes parallèles.

Nous raisonnons par récurrence double, premièrement croissante sur l'ordre  $n$  du graphe  $G_m$ , secondement sur le nombre  $|E(Und(G_m))|$ . Les différentes propriétés énoncées sont vérifiées par les différents graphes mixtes d'ordre 2.

Soit, à présent,  $n$  un entier strictement supérieur à 2 et supposons ces propriétés vérifiées pour tout graphe mixte d'ordre  $n - 1$ .

Les propriétés précédentes sont vérifiées par les graphes mixtes complets d'ordre  $n$ , puisque si  $E(Und(G_m)) = n(n - 1)/2$ , alors nous avons :  $P_m(G_m, k) = k(k - 1)(k - 2) \dots (k - n + 1)$ .

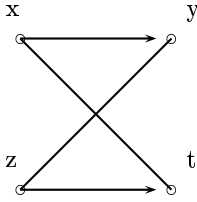
Soit  $m$  un entier strictement inférieur à  $n(n - 1)/2$  et supposons l'ensemble des propriétés vérifiées pour tout graphe mixte d'ordre  $n$  tels que  $|E(Und(G_m))| = m + 1$ .

Par la formule de récurrence précédente, nous avons :  $P_m(G_m, k) = P_m(G_m \cup e, k) + P_m(G_m - e, k)$ . Par hypothèse de récurrence,  $P_m(G_m \cup e, k)$  et  $P_m(G_m - e, k)$  vérifient l'ensemble des propriétés précédentes. Après un simple calcul, nous en déduisons que  $P_m(G_m, k)$  vérifie lui aussi l'ensemble de ces propriétés, et le théorème est donc vérifié au rang  $m$ .  $\square$

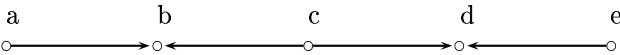
### 3.1 Formule par Exclusion / Inclusion

En nous inspirant du travail d'Eric Sopena dans [9], nous pouvons, à notre tour, exprimer le polynôme chromatique mixte de  $G_m$  comme somme de polynômes chromatiques (classiques) de sous-graphes de  $Und(G_m)$ . Pour ce faire, nous associons à un graphe mixte  $G_m$  l'ensemble  $\mathcal{C}(G_m)$  suivant :

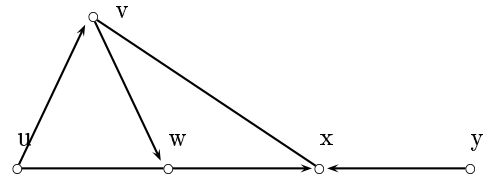
$$\mathcal{C}(G_m) = \{ \{(x, y), (z, t)\} \in A(G_m)^2 / \{y, z\} \text{ et } \{x, t\} \notin E(Und(G_m)) \}$$



De manière informelle, l'ensemble  $\mathcal{C}(G_m)$  est l'ensemble des paires d'arcs pouvant contredire la propriété *ii.* de la coloration mixte. Donnons quelques exemples :



Graphe mixte  $G_1$



Graphe mixte  $G_2$

Le graphe mixte  $\mathcal{C}(G_1) = \{\{(a, b), (e, d)\}\}$ .

Pour  $G_2$ , nous avons  $\mathcal{C}(G_2) = \{\{(u, v); (y, x)\}\}$ .

Si  $Z = \{ \{(x_1, y_1), (z_1, t_1)\}, \dots, \{(x_k, y_k), (z_k, t_k)\} \}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{C}(G_m)$ , nous désignons par  $Id(G_m, Z)$  le graphe obtenu, partant de  $Und(G_m)$  en identifiant les sommets  $x_i$  avec les sommets  $t_i$ , et les sommets  $y_i$  avec les sommets  $z_i$ , pour tout  $1 \leq i \leq k$ . Une telle identification peut nous conduire à l'obtention d'un graphe ayant des boucles. Rappelons, que le polynôme chromatique d'un tel graphe, est nul.

Notons, enfin l'égalité  $Id(G_m, \emptyset) = Und(G_m)$ . Nous pouvons, à présent, énoncer le théorème suivant :

#### **Théorème 3** Formule par Inclusion / Exclusion

Soit  $G_m$  un graphe mixte. Nous avons :

$$P_m(G_m, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m)} (-1)^{|Z|} \times P(Id(G_m, Z), k)$$

Démonstration : Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $G_m$  est  $N$ -maximal (i.e.  $G_m = N(G_m)$ ). Soit  $k$  un entier strictement positif.

L'ensemble  $\mathcal{C}(G_m)$  est union de  $p$  paires d'arcs  $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\} / \{y_j, z_j\}$  et  $\{x_j, t_j\} \notin E(Und(G_m))$ . Nous noterons  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  les  $p$  éléments de  $\mathcal{C}(G_m)$ . Tout sous-ensemble  $Z$  de  $\mathcal{C}(G_m)$  est union de  $\alpha_l$ . Désignons par  $X$ , l'ensemble des  $k$ -colorations de  $Und(G_m)$ . Nous avons donc  $|X| = |P(Und(G_m), k)|$ . Parmi ces  $P(Und(G_m), k)$   $k$ -colorations de  $G_m$ , certaines sont des colorations mixtes de  $G_m$ , d'autres non. Le principe d'inclusion / exclusion va nous permettre de dénombrer les premières.

A une  $k$ -coloration  $c$  de  $Und(G_m)$ , nous associons le sous-ensemble  $Z(c) \subset \mathcal{C}(G_m)$  défini par l'ensemble des paires d'arcs  $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\} \in \mathcal{C}(G_m)$  tels que  $c(x_j) = c(t_j)$  et  $c(y_j) = c(z_j)$ . Une telle  $k$ -coloration  $c$  de  $Und(G_m)$  est aussi une coloration mixte de  $G_m$ , si et seulement, si  $Z(c) = \emptyset$ .

Pour  $1 \leq i \leq p$ , nous dirons que la  $k$ -coloration  $c$  de  $Und(G_m)$  vérifie la propriété  $P_i$  si  $\alpha_i \in Z(c)$ . Nous posons  $A_i = \{c \text{ coloration de } Und(G_m) / c \text{ vérifie la propriété } P_i\} \subset X$ . Remarquons que le nombre de  $k$ -colorations de  $Und(G_m)$  vérifiant la propriété  $P_i$  est le nombre de  $k$ -colorations de  $Id(G_m, \alpha_i)$ , soit  $P(Id(G_m, \alpha_i), k)$ .

Soit  $Z$  un sous-ensemble de  $\mathcal{C}(G_m)$ . Le nombre de  $k$ -colorations de  $Und(G_m)$  vérifiant  $Z(c) = Z$  est égal au nombre de  $k$ -colorations vérifiant les propriétés  $\{P_i\}_{i/\alpha_i \in Z}$ , soit encore le nombre de  $k$ -colorations de  $Id(G, Z)$ , c'est-à-dire  $P(Id(G, Z), k)$ .

La formule d'inclusion / exclusion nous donne alors :

$$|\bigcup_{i=1}^p A_i| = \sum_{i=1}^p |A_i| - \sum_{i,j:i \neq j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^p |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p|.$$

Nous remarquons alors que  $\sum_{i=1}^p |A_i| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 1} P(Id(G_m, Z), k)$ .

$$\sum_{1 \leq i,j \leq p; i \neq j} |A_i \cap A_j| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 2} P(Id(G_m, Z), k).$$

Plus généralement, pour  $l \in \{1, 2, \dots, p\}$ , nous obtenons la formule suivante :

$$\sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_l \leq p, i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_l} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq l} P(Id(G_m, Z), k).$$

Ainsi obtenons-nous :  $|\bigcup_{i=1}^p A_i| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 1} (-1)^{|Z|+1} P(Id(G_m, Z), k)$ .

Les  $k$ -colorations mixtes de  $G_m$  étant les  $k$ -colorations de  $Und(G_m)$  telles que  $Z(c) = \emptyset$ , nous avons :  $P_m(G_m, k) = |X \setminus (\bigcup_{i=1}^p A_i)| = P(Und(G_m), k) - |\bigcup_{i=1}^p A_i|$ . Soit  $P_m(G_m, k) = P(Und(G_m), k) - \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 1} (-1)^{|Z|+1} P(Id(G_m, Z), k)$ . Or, comme  $Und(G_m) = Id(G_m, \emptyset)$ , donc  $P_m(G_m, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m)} (-1)^{|Z|} P(Id(G_m, Z), k)$ .

Cette formule étant donc vraie pour tout  $k$  entier fixé strictement positif, l'égalité des deux polynômes est établie.  $\square$

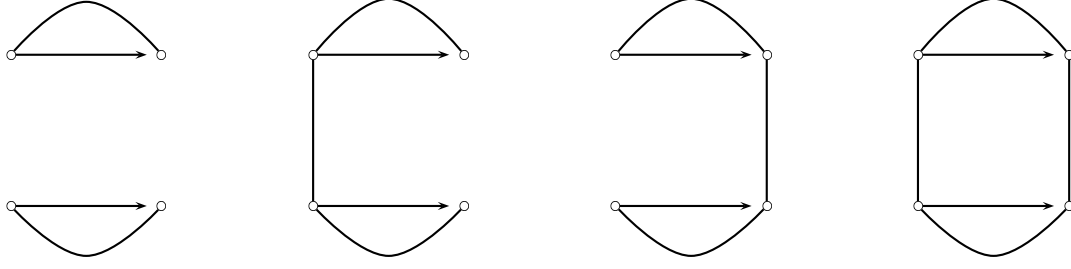
## 4 Polynôme chromatique mixte et orientations acircuitiques

Nous allons présenter, dans cette section, une interprétation de  $|P_m(G_m, -1)|$  en termes d'orientation acircuitique. Les couples d'arcs de l'ensemble  $\mathcal{C}(G_m)$ , peuvent se séparer en deux configurations.



Nous allons, déjà, étudier les graphes mixtes  $G_m$  tels que l'ensemble  $\mathcal{C}(G_m)$  ne contienne pas de couples d'arcs relevant de la seconde configuration. De tels graphes mixtes sont exactement les graphes mixtes  $G_m$  tels que le graphe mixte  $N(G_m)$  associé n'ait pas comme sous-graphe mixte induit par 4 sommets les graphes mixtes

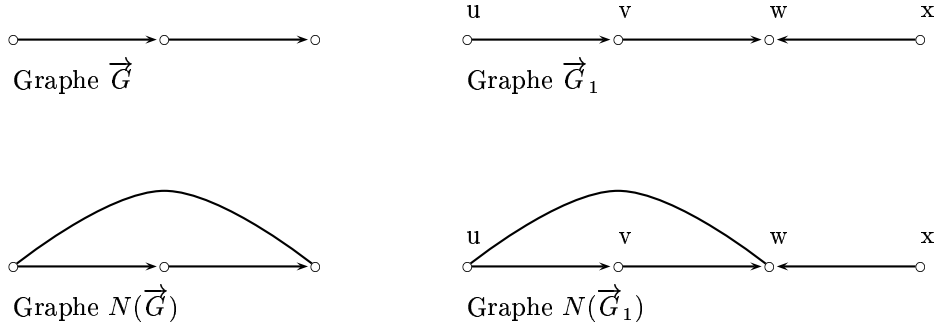
suivants :



**Proposition 1** Soit  $G_m$  un graphe mixte tel que, si  $\{(x, y), (z, t)\} \in \mathcal{C}(G_m)$ , alors  $y = z$ . Alors,  $P_m(G_m, k) = (-1)^n |A(\text{Und}(N(G_m)))|$ , où  $A(\text{Und}(N(G_m)))$  désigne l'ensemble des orientations acircuitiques de  $\text{Und}(N(G_m))$ . De même, le coefficient  $c_1$  est-il le nombre d'orientations acircuitiques de  $\text{Und}(N(G_m))$  ayant exactement une source.

Preuve : Soit  $G_m$  un tel graphe. Supposons  $\{(x, y), (y, z)\} \in \mathcal{C}(G_m)$ . Par construction de  $N(G_m)$ ,  $\{x, z\} \in E(N(G_m))$ , et donc  $\{(x, y), (y, z)\} \notin \mathcal{C}(N(G_m))$ . Ainsi  $\mathcal{C}(N(G_m)) = \{\emptyset\}$ . Par la formule d'inclusion / exclusion, nous en déduisons alors  $P_m(N(G_m), -1) = P(\text{Und}(N(G_m)), -1)$ . Le résultat dû à Stanley (cf [11]) implique :  $P(\text{Und}(N(G_m)), -1) = (-1)^n |A(\text{Und}(N(G_m)))|$ , où  $|A(\text{Und}(N(G_m)))|$  désigne donc le nombre d'orientations acircuitiques de  $\text{Und}(N(G_m))$ .

La seconde assertion découle du résultat de Gessel ([4,7,3]).  $\square$



Nous avons :

$$P_m(\vec{G}, k) = k(k-1)(k-2) = P(\text{Und}(N(\vec{G})), k)$$

Ainsi, le nombre d'orientations acircuitiques est-il bien 6 (des  $2^3 = 8$  orientations possibles de  $\text{Und}(N(\vec{G}))$ , deux conduisent à des circuits). Le graphe  $\vec{G}$  a pour polynôme chromatique orienté  $k(k-1)(k-2)$ , correspondant bien au polynôme chromatique (classique) de  $\text{Und}(M(\vec{G}))$ .

Concernant le graphe  $\vec{G}_1$ , nous avons :  $\mathcal{C}(\vec{G}_1) = \{ \{(u, v)(v, w)\}; \{(u, v), (x, w)\} \}$  et donc ce graphe ne vérifie pas la condition précédente. Néanmoins, nous observons que  $\mathcal{C}(N(\vec{G}_1)) = \{\emptyset\}$ , ce qui vérifie bien l'hypothèse.

$$P_m(\vec{G}_1, k) = k^5 - 4k^4 + 5k^3 - k^2 - k = P(\text{Und}(N(\vec{G}_1)), k)$$

Nous vérifions qu'il existe bien 12 orientations acircuitiques différentes de  $N(\vec{G}_1)$ .

Le précédent résultat implique que si  $G_m$  est un graphe mixte  $N$ -maximal, alors

$$\{(x, y), (z, t)\} \in \mathcal{C}(G_m) \Rightarrow y \neq z$$

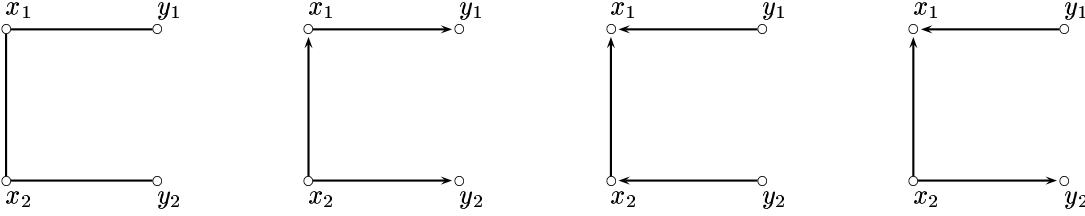
De plus, puisque  $P_m(G_m, k) = P_m(N(G_m), k)$ , nous supposons dans la suite que l'ensemble  $\mathcal{C}(G_m)$  possède uniquement des paires de la seconde configuration.

Passons, à présent, à l'étude de graphes mixtes dont l'ensemble  $\mathcal{C}(G_m)$  possède des paires d'arcs relevant de la seconde configuration. Pour ce faire, nous introduisons quelques notions intervenant dans l'interprétation de  $P_m(G_m, -1)$ .

**Définition 1** Orienter dans le même sens.

Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe (non-orienté), et soit une paire de couples de sommets de  $G$   $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$  tels que  $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\} \in E(G)$ . Soit  $o$  une orientation de  $G$  en  $\vec{G} = (V(G), A(\vec{G}))$ . Nous dirons que  $\vec{G}$  oriente dans le même sens le couple de paires  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$  si  $(x_1, y_1) \in A(\vec{G}) \iff (x_2, y_2) \in A(\vec{G})$ .

Afin d'illustrer cette propriété "d'orienter dans le même sens", nous donnons un graphe, puis deux orientations de celui-ci orientant le couple  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$  dans le même sens, et enfin une autre dénué de cette propriété.



**Définition 2** Soient  $\{(x, y), (z, t)\}$  une paire d'arc de  $G_m$  et soit  $o$  une orientation de  $Und(G_m)$ . Nous dirons que les arcs  $(x, y), (z, t)$  sont reliés par un chemin dans  $o(Und(G_m))$  s'il existe un chemin, dans  $o(Und(G_m))$ , contenant l'un des deux arcs ( $o(\{x, y\})$  ou  $o(\{z, t\})$ ) dont l'une des extrémités est une extrémité de l'autre arête.

**Proposition 2** Soit  $G_m$  un graphe mixte  $N$ -maximal tel que  $\mathcal{C}(G_m) = \bigcup_{i=1}^p \{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}$  (un sommet n'apparaissant qu'une seule fois dans  $\mathcal{C}(G_m)$ ). Nous supposons de plus qu'il n'existe pas, dans  $Und(G_m)$  de chemins entre les sommets  $x_i$  et  $x_j$ , ( $1 \leq i < j \leq p$ ). Nous avons alors :

$$P_m(G_m, -1) = (-1)^n |A_s(G_m)|$$

où  $A_s(N(G_m))$  désigne l'ensemble des orientations acircuitiques  $o$  du graphe  $Und(N(G_m))$  soit donnant même sens, soit reliant par un chemin, toutes paires  $\{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}_{1 \leq i \leq p}$ .

Démonstration : Raisonnons par récurrence forte sur  $p$ .

La proposition est vraie pour  $p = 0$  par la proposition précédente. Soit  $p$  un entier strictement positif. Supposons la proposition vraie pour tout graphe  $G'_m$  tel que  $|\mathcal{C}(G'_m)| \leq p - 1$ , et considérons  $G_m$  un graphe mixte tel que  $\mathcal{C}(G_m) = \bigcup_{i=1}^p \{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}$ .

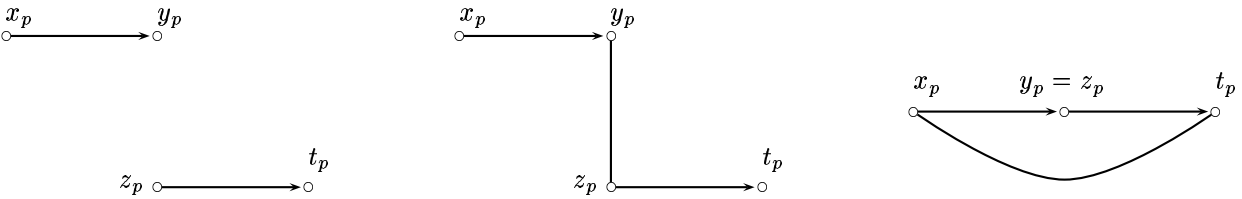
Soit  $e = \{y_p, z_p\} \notin E(G_m)$ . Les graphes mixtes  $G_m \cup e$  et  $G_m - e$  vérifient :

$|\mathcal{C}(G_m \cup e)| \leq p - 1$ ;  $|\mathcal{C}(G_m - e)| \leq p - 1$ . Ainsi, l'hypothèse de récurrence implique les égalités :

$$P_m(G_m \cup e, -1) = (-1)^n |A_s(G_m \cup e)| \quad P_m(G_m - e, -1) = (-1)^{n-1} |A_s(G_m - e, -1)|$$

Considérons  $o \in A_s(G_m \cup e)$ , l'une des  $|P_m(G_m \cup e, -1)|$  orientations acircuitiques de  $G_m \cup e$  donnant même orientation ou reliant par un chemin tous les couples de  $\mathcal{C}(G_m \cup e)$ .

Nous lui associons, d'une part, l'orientation de  $A_s(G_m)$ , notée  $o \setminus o(e)$ , définie en privant l'orientation  $o$  de l'orientation de l'arête  $e$  et, d'autre part, l'orientation partielle  $o_e$  de  $N(G_m - e)$  définie par l'identification des sommets  $y_p$  et  $z_p$  dans l'orientation  $o$ . Pour compléter cette dernière en une orientation de  $A_s(G_m - e)$ , il est nécessaire de donner une orientation à l'arête  $\{x_p, t_p\}$ , cette arête n'existant pas dans  $G_m \cup e$ , mais existant dans  $N(G_m - e)$  comme le montre le schéma ci-dessous.



Grphe  $G_m$

Grphe  $G_m \cup e$

Grphe  $N(G_m - e)$

Ainsi, en spécifiant l'orientation de l'arête  $\{x_p, t_p\}$ , nous obtenons une orientation de  $A_s(N(G_m - e))$ . Enfin, nous

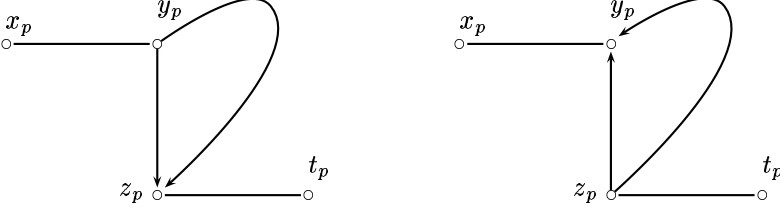


notons  $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$  l'orientation de  $G_m \cup e$  définie, partant de l'orientation  $o$ , en inversant l'orientation de l'arc  $o(e)$ . Notons les égalités en tant, respectivement, qu'orientations de  $G_m$  et de  $G_m \setminus e$  :

$$o \setminus o(e) = o' \setminus o'(e); \quad o_e = o'_e.$$

- Premier cas : S'il existe, dans l'orientation  $o \setminus o(e)$ , un chemin entre  $y_p$  et  $z_p$ .

Alors il existe une unique orientation de  $e$  rendant  $o(G_m \cup e)$  acircuitique. Nous sommes, alors, dans l'une des configurations suivantes :



Configuration a.

Configuration b.

Dans ce cas, les orientations  $o'$  de  $G_m \cup e$  et  $o_e$  de  $G_m \setminus e$  ne sont pas acircuitiques. Ainsi, définissons-nous l'application entre ces orientations de  $G_m \cup e$  et des orientations de  $G_m$  :

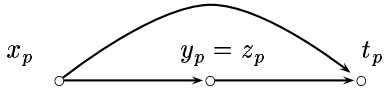
$$\phi_1(o) = o \setminus e \in A_s(G_m \cup e).$$

Nous constatons que nous obtenons une bijection entre l'ensemble des orientations acircuitiques  $o$  de  $A_s(G_m \cup e)$  ayant un chemin entre  $y_p$  et  $z_p$  et l'ensemble des orientations acircuitiques de  $A_s(G_m)$  possédant un chemin entre  $y_p$  et  $z_p$ .

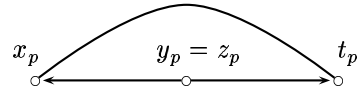
Nous déduisons un résultat similaire s'il existe, dans  $o(G_m \cup e)$ , un chemin entre  $x_p$  et  $t_p$ .

Second cas : S'il n'existe pas, dans  $o$ , de chemin entre  $y_p$  et  $z_p$ , ni de chemin entre  $x_p$  et  $t_p$ .

Alors, l'orientation  $o'$  définie par  $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$  est aussi une orientation acircuitique appartenant à  $A_s(G_m \cup e)$ . Considérons les deux sous-cas suivants :



Premier sous-cas



Second sous-cas

$\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$  sont orientés dans le même sens

$\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$  ne sont pas orientés dans le même sens

Si la paire d'arcs  $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$  est orientée dans le même sens par l'orientation  $o$ , alors il existe une unique orientation de l'arête  $\{x_p, t_p\}$  permettant de compléter l'orientation  $o_e$  en une orientation acircuitique de  $N(G_m \setminus e)$ . Notons  $o_e(\{x_p, t_p\})$  celle-ci. Définissons alors l'application  $\phi_2$  par :

$$\phi_2(o) = o_e \cup o_e(\{x_p, t_p\}) \in A_s(N(G_m \setminus e)).$$

$$\phi_2(o') = o' \setminus o'(e) \in A_s(G_m).$$

L'application  $\phi_2$ , ainsi définie, est une bijection entre ce sous-ensemble des orientations acircuitiques de  $A_s(G_m \cup e)$  et l'union de l'ensemble des orientations acircuitiques de  $A_s(N(G_m \setminus e))$  telles que  $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$  soient orientées dans le même sens et telles qu'il n'y ait pas de chemin autre entre  $x$  et  $t$  que l'arc  $o(\{x_p, t_p\})$  et le sous-ensemble de  $A_s(G_m)$  formé des orientations acircuitiques donnant même sens au couple  $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ .

Si la paire d'arcs  $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$  n'est pas orientée dans le même sens par l'orientation  $o$ , alors, les deux orientations différentes de l'arête  $\{x_p, t_p\}$  complètent l'orientation  $o_e$  en une orientation acircuitique de  $A_s(N(G_m \setminus e))$ . Ainsi, faisons-nous correspondre ces orientations de  $A_s(G_m \cup e)$  et certaines orientations de  $A_s(N(G_m \setminus e))$  de la façon suivante :

$$\phi_3(o) = o_e \cup (x_p, t_p) \in A_s(N(G_m \setminus e)).$$

$$\phi_3(o') = o'_e \cup (t_p, x_p) \in A_s(N(G_m \setminus e)).$$

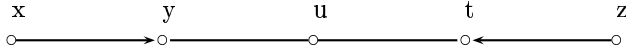
Nous obtenons, alors, une bijection entre ces orientations de  $A(G_m \cup e)$  et le sous-ensemble de  $A(N(G_m \setminus e))$  constitué des orientations telles que le couple  $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$  ne soit pas orienté dans le même sens et telle qu'il n'y ait pas de chemin entre  $x_p$  et  $t_p$  autre que l'arc  $o(\{x_p, t_p\})$ .

En regroupant les bijections  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ , nous obtenons finalement une bijection entre l'ensemble  $A_s(G_m \cup e)$  et l'union de :

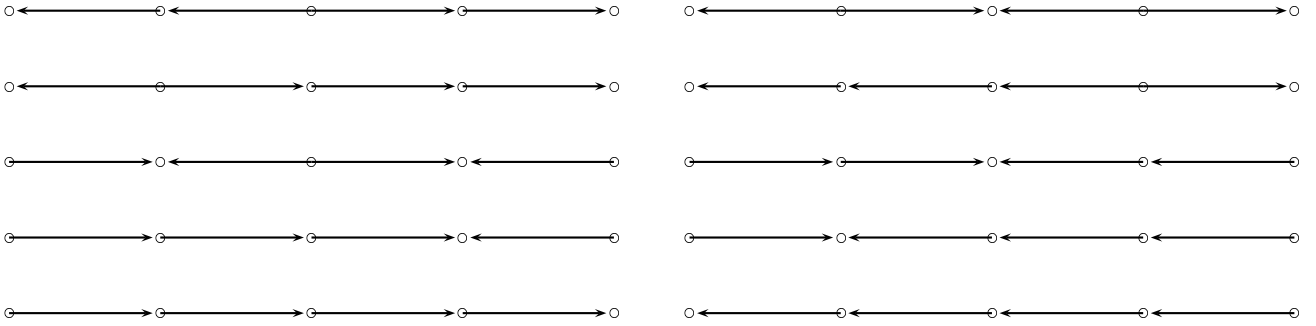
- l'ensemble des orientations acircuitiques de  $A_s(G_m)$  donnant même orientation au couple  $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$  ou ayant un chemin entre  $x_p$  et  $t_p$  ou entre  $y_p$  et  $z_p$ ,
- l'ensemble des orientations acircuitiques de  $A_s(N(G_m \cup e))$ .

Comme ce dernier ensemble a pour cardinal  $|P_m(N(G_m \cup e), -1)|$ , nous en déduisons la proposition.  $\square$

Présentons quelques exemples.

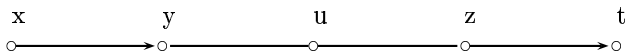


Ce premier graphe  $G_m$  est bien  $N$ -maximal (i.e. que  $N(G_m) = G_m$ ) et  $\mathcal{C}(G_m) = \{(x, y), (z, t)\}$ . Le polynôme chromatique mixte de ce graphe est  $k^5 - 4k^4 + 5k^3 - k^2 - k$ . Ainsi,  $P_m(G_m, -1) = -10$  ; il doit donc y avoir 10 orientations acircuitiques de ce graphe orientant dans le même sens  $\{(x, y), (z, t)\}$  ou les reliant par un chemin. Nous les donnons ici :



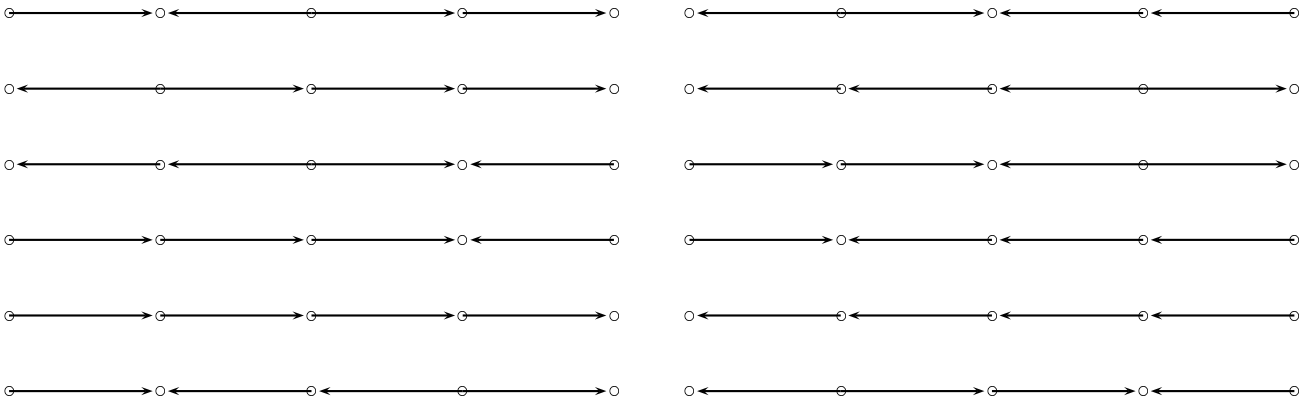
De ces dix orientations, seules les deux dernières (tout en bas), ne respectent pas l'orientation dans le même sens des arcs de  $\mathcal{C}(G_1)$  ; nous avons alors bien deux chemins (utilisant au moins l'un des arcs).

Donnons un autre exemple assez similaire au premier.



Le polynôme chromatique orienté du graphe précédent est :

$P_m(G_m, k) = k^2(k-1)^2(k-2)$ . Ainsi  $P_m(G_m, -1) = -12$ . Donnons les 12 orientations acicuitiques telles que...



Sur ces 12 configurations, les seules n'orientant pas le couple  $\{(x, y), (z, t)\}$  dans le même sens sont les deuxième et quatrième (en partant du haut).

Nous pouvons généraliser la proposition précédente en remarquant que la démonstration est valable dès que :

$$\mathcal{C}(G_m \cup e) = \mathcal{C}(G_m - e) = \mathcal{C}(G_m) \setminus (x, y), (z, t)$$

Si l'on désigne par  $e$  la paire  $\{y, z\}$  telle que  $\{y, z\} \notin E(Und(G_m))$ .

Nous définissons l'ensemble des graphes mixtes  $A_s$ -interprétable de la façon suivante :

Tout graphe  $G_m$  tel que  $\mathcal{C}(N(G_m)) = \bigcup_{i=1}^p \{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}$  est  $A_s$ -interprétable.

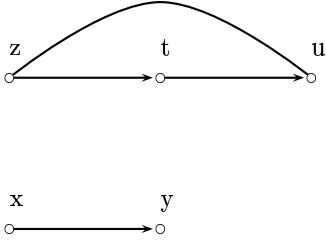
Tout graphe  $G_m$  tel qu'il existe  $e = \{x, y\} \notin E(Und(N(G_m)))$  tel que les graphes mixtes  $N(G_m \cup e)$  et  $N(G_m - e)$  vérifient  $\mathcal{C}(G_m \cup e) = \mathcal{C}(G_m - e) = \mathcal{C}(G_m) \setminus (x, y), (z, t)$  et soit  $A_s$ -interprétable est  $A_s$ -interprétable.

Nous obtenons, alors, le corollaire suivant :

**Corollaire 4** *Pour tout graphe mixte  $G_m$   $A_s$ -interprétable, nous avons :*

$$P_m(G_m, -1) = (-1)^n |A_s(Und(G_m))|$$

Donnons un graphe mixte  $N$ -maximal ne vérifiant pas la précédente condition :



Le graphe  $G_m$  est bien  $N$ -maximal, et nous avons :  $\mathcal{C}(G_m) = \{(x, y), (z, t)\}, \{(x, y), (t, u)\}$ .

Nous constatons en effet que  $\mathcal{C}(G_m - e) = \{\emptyset\} \neq \mathcal{C}(G_m) \setminus \{(x, y), (z, t)\}$ , avec  $e = \{y, z\}$ .

Le polynôme chromatique mixte de ce graphe est :  $P_m(G_m, k) = k(k-1)(k-2)^2(k+1)$ . Ainsi, son évaluation en  $-1$  est-elle nulle ( $P_m(G_m, -1) = 0$ ).

Nous allons à présent énoncer un résultat (partiel) permettant de prendre en compte ce genre de graphe mixte.

**Proposition 3** *Soit  $G_m$  un graphe mixte tel que  $\mathcal{C}(G_m) = \{(x, y), (z, t)\}, \{(x, y), (u, v)\}$ , tel que les sommets  $z, t, u$  et  $v$  soient dans la même composante connexe et  $x, y$  ne soient pas dans celle-ci. Nous obtenons alors :*

$$P_m(G_m, -1) = (-1)^n (|A_s(G_m)| - |B_s(G_m)|)$$

où  $B_s(G_m)$  désigne l'ensemble des orientations acircuitiques de  $G_m$  telles qu'il existe un chemin contenant les arcs  $(z, t)$  et  $(u, v)$  et que ceux-ci ne soient pas orientés dans le même sens que l'arc  $(x, y)$ .

Preuve : Nous considérons la formule  $P_m(G_m, -1) = P_m(G_m \cup e, -1) + P_m(G_m - e, -1)$ , avec  $e = \{y, z\}$ . Nous retrouvons alors deux graphes mixtes  $G_m \cup e$  et  $G_m - e$  vérifiant la condition de la précédente proposition. Ainsi  $P_m(G_m \cup e, -1) = (-1)^n |A_s(G_m \cup e)|$  et  $P_m(G_m - e, -1) = (-1)^{n-1} |A_s(G_m - e)|$ .

Soit  $o \in A_s(G_m \cup e)$ .

- Si  $(x, y)$  et  $(u, v)$  ont même orientation par  $o$ . Dans ce cas, l'orientation  $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$  appartient aussi à  $A_s(G_m \cup e)$ .

Si  $o$  n'oriente pas dans le même sens la paire  $\{(x, y), (z, t)\}$ , alors l'application  $\psi_1$  définie par :

$$\psi_1(o) = o_e \cup (x, t) \in A_s(G_m - e)$$

$$\psi_1(o') = o_e \cup (t, x) \in A_s(G_m - e)$$

est une bijection entre ces orientations de  $A_s(G_m \cup e)$  et les orientations de  $A_s(G_m - e)$  n'orientant pas  $(x, y), (z, t)$  dans le même sens. Si  $o$  oriente dans le même sens la paire d'arc  $\{(x, y), (z, t)\}$ , alors il n'existe qu'une seule orientation possible de l'arête  $\{x, t\}$  de  $G_m - e$  rendant l'orientation  $o_e$  acircuitique. Notons  $o_e(\{x, t\})$  celle-ci.

Nous considérons l'application  $\psi_2$  définie par :

$$\psi_2(o) = o_e \cup o_e(\{x, t\}) \in A_s(G_m - e).$$

$$\psi_2(o') = o' \setminus o(e) \in A_s(G_m - e).$$

est une bijection entre ces orientations de  $A_s(G_m \cup e)$  et l'union des orientations de  $A_s(G_m - e)$  et de  $A_s(G_m)$  orientant  $\{(x, y), (z, t)\}$  dans le même sens.

- Sinon  $(x, y)$  et  $(u, v)$  n'ont pas même orientation mais sont reliés par un chemin dans  $o(G_m \cup e)$ . Comme  $(x, y)$  n'appartient pas, dans  $G_m$ , à la composante connexe de  $(z, t), (u, v)$ , nous en déduisons que ce chemin passe

nécessairement par l'arc  $o(\{z, y\})$ , impliquant que  $\{(x, y), (z, t)\}$  ne sont pas orienté dans le même sens dans  $o(G_m \cup e)$ . De plus, l'orientation  $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$  n'appartient pas à  $A_s(G_m \cup e)$ . Néanmoins, nous constatons que les deux orientations :  $o_e \cup (x, t)$  et  $o_e \cup (t, x)$  appartiennent à  $A_s(G_m - e)$ . Définissons l'application  $\psi_3$  sur le sous-ensemble formé des orientations de  $A_s(G_m - e)$  n'orientant pas dans le même sens  $\{(x, y), (z, t)\}$ , par :

$$\psi_3(o_e \cup (x, t)) = o \in A_s(G_m \cup e).$$

$$\psi_3(o_e \cup (t, x)) = (o \setminus o(e)) \in B_s(G_m).$$

La précédente application induit une bijection entre le sous-ensemble de  $A_s(G_m - e)$  (formé des orientations n'orientant pas  $\{(x, y), (z, t)\}$  dans le même sens, et l'union du sous-ensemble de  $A_s(G_m \cup e)$  formé des orientations de  $A_s(G_m \cup e)$  n'orientant pas  $\{(x, y), (u, v)\}$  dans le même sens et le sous-ensemble  $B_s(G_m)$ . La proposition s'ensuit de la réunion de ces bijections.  $\square$

## Références

1. G.D. Birkhoff. A determinantal formula for the number of ways of coloring a map. *Annals of Mathematics*, 14.
2. G.D. Birkhoff and D.C. Lewis. Chromatics polynomials. *Trans. American Mathematical Society*, 60.
3. David D. Gebhard and Bruce E. Sagan. Sinks in orientations of graphs. *Journal of Combinatorics Theory*, Serie B.
4. Ira M. Gessel. Counting acyclic digraphs by sources and sinks. *Discrete Mathematics*, pages 253–258, 1996.
5. Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley Intersciences Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.
6. A. V. Kostochka, E. Sopena, and X. Zhu. Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs. *Journal of Graph theory*, 24, N. 4 :331–340, 1997.
7. Bodo Lass. Orientations acycliques et le polynômes chromatique. *European Journal of Combinatorics*, 22 :1101–1123, 2001.
8. Alexander V. Kostochka André Raspaud Oleg V. Borodin, Dimitri Fon-der-Flaass and Eric Sopena. On deeply critical oriented graphs. *Journal of Combinatorics Theory Serie B*, 81 :150–155, 2001.
9. Eric Sopena. Computing chromatic polynomials of oriented graphs. *Proc. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics FPSAC'94*, pages 413–422, 1994.
10. Eric Sopena. Oriented graph coloring. *Discrete Mathematics*, 229 :359–369, 2001.
11. R.P. Stanley. Acyclic orientations of graphs. *Discrete Mathematics*, 5 :171–178, 1973.
12. Bjarne Toft. Colouring, stable sets and perfect graphs. In R. Graham, M. Grottschel, and L. Lovasz, editors, *Handbook of Combinatorics*, pages 233–288. Elsevier Science, 1995.